

CAPITOLO 7

COMPRESSIBILITÀ E CONSOLIDAZIONE EDOMETRICA

La risultante delle deformazioni verticali che si manifestano in un terreno è comunemente indicata con il termine *cedimento* e di tale grandezza, nella pratica ingegneristica, interessa di solito conoscere sia l'entità sia l'evoluzione nel tempo.

I principali meccanismi che contribuiscono allo sviluppo dei cedimenti sono:

- compressione e inflessione delle particelle di terreno per incremento delle tensioni di contatto (tale fenomeno produce deformazioni in gran parte reversibili, ovvero elastiche);
- scorrimento relativo dei grani indotto dalle forze di taglio intergranulari (tale fenomeno produce deformazioni in gran parte irreversibili, ovvero plastiche);
- frantumazione dei grani in presenza di elevati livelli tensionali (le conseguenti deformazioni sono irreversibili);
- variazione della distanza tra le particelle dei minerali argillosi, dovuta a fenomeni di interazione elettrochimica (le conseguenti deformazioni sono in parte reversibili e in parte irreversibili in relazione alle caratteristiche del legame di interazione);
- compressione e deformazione dello strato di acqua adsorbita (le conseguenti deformazioni sono in gran parte reversibili, ovvero elastiche);

In definitiva, le deformazioni (e quindi i cedimenti) conseguono direttamente alla:

1. compressione delle particelle solide (incluso lo strato di acqua adsorbita);
2. compressione dell'aria e/o dell'acqua all'interno dei vuoti;
3. espulsione dell'aria e/o dell'acqua dai vuoti.

Per i valori di pressione che interessano nella maggior parte dei casi pratici, la deformabilità delle particelle solide è trascurabile. Inoltre, se il terreno è saturo, come spesso accade per i terreni a grana fine, anche la compressibilità del fluido interstiziale (acqua e/o miscela aria-acqua) può essere trascurata, essendo trascurabile la quantità di aria presente e l'acqua praticamente incompressibile. Pertanto, il cedimento nei terreni è dovuto prevalentemente al terzo termine ed in particolare all'espulsione dell'acqua dai vuoti¹.

Via via che l'acqua viene espulsa dai pori, le particelle di terreno si assestano in una configurazione più stabile e con meno vuoti, con conseguente diminuzione di volume.

Il processo di espulsione dell'acqua dai vuoti è un fenomeno dipendente dal tempo (ovvero dal coefficiente di permeabilità del terreno), l'entità della variazione di volume è legata alla rigidità dello scheletro solido.

Si distinguono quindi i due concetti di compressibilità e consolidazione.

Compressibilità è la risposta in termini di variazione di volume di un terreno sottoposto ad un incremento dello stato tensionale (efficace, in base al principio delle pressioni efficaci). È necessario studiare la compressibilità di un terreno per stimare le deformazioni volumetriche ed i conseguenti cedimenti.

¹ I cedimenti possono essere anche dovuti a costipamento, ovvero all'espulsione di aria da un terreno non saturo come conseguenza dell'applicazione di energia di costipamento (vedi capitolo 2), a deformazioni di taglio a volume costante, che si verificano nei terreni saturi e poco permeabili in condizioni non drenate all'atto stesso di applicazione dell'incremento delle tensioni, o a deformazioni volumetriche a pressione efficace costante, ovvero a creep (viscosità).

Consolidazione è la legge di variazione di volume del terreno nel tempo. È necessario studiare la consolidazione per stimare il decorso delle deformazioni volumetriche e dei conseguenti cedimenti, nel tempo.

Sebbene in linea di principio si possano applicare i concetti di compressibilità e di consolidazione sia a terreni granulari che a terreni a grana fine, in pratica interessano soprattutto questi ultimi, e particolarmente le argille, perché di norma responsabili di cedimenti maggiori e di tempi di consolidazione molto più lunghi.

7.1 Compressibilità edometrica

La compressibilità di un terreno viene spesso valutata in condizioni di carico assiale uniformemente distribuito e di assenza di deformazioni laterali; tali condizioni sono dette “edometriche” (dal nome della prova utilizzata per riprodurle, che verrà descritta nel seguito).

Le condizioni edometriche si realizzano ad esempio nel caso della formazione di un deposito di terreno per sedimentazione lacustre (v. anche Capitolo 3 – Tensioni geostatiche), il cui schema è riportato nella Figura 7.1a. Il terreno è immerso e quindi è saturo (tutti i vuoti sono pieni d’acqua); inoltre, essendo il deposito infinitamente esteso in direzione orizzontale, per simmetria non sono possibili deformazioni orizzontali.

In corrispondenza di un generico punto P (Figura 7.1a), la pressione efficace verticale (ed anche quella orizzontale) cresce gradualmente via via che avviene la sedimentazione e che il punto considerato, viene a trovarsi a profondità maggiori.

Per effetto dell’incremento di tensioni efficaci, il terreno subisce deformazioni volumetriche, ε_v , le quali, non essendo possibili deformazioni orizzontali, sono eguali alle deformazioni verticali (assiali), ε_a , ovvero:

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta H}{H_0} = \varepsilon_a \quad (\text{Eq. 7.1})$$

essendo V_0 e H_0 il volume e l’altezza iniziale di un elemento di volume nell’intorno del punto P considerato, ΔV e ΔH le relative variazioni di volume e di altezza.

In Ingegneria Geotecnica, per tradizione, si fa più spesso riferimento alle variazioni di indice dei vuoti piuttosto che alle variazioni di volume.

Dalla definizione di deformazione volumetrica e ricordando la definizione di indice dei vuoti ($e = \frac{V_v}{V_s}$), si desume comunque la relazione:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta e}{1 + e_0} = \frac{\Delta H}{H_0} \quad (\text{Eq. 7.2})$$

avendo indicato con e_0 l’indice dei vuoti iniziale dell’elemento di terreno considerato.

Rappresentando in un diagramma l’indice dei vuoti del terreno in funzione della pressione verticale efficace, riportata in scala logaritmica, nel caso in cui il deposito sia soggetto a più cicli di carico e scarico, ad esempio sedimentazione (A-B), seguita da erosione (B-C), di nuovo sedimentazione (C-D), fino a superare lo strato eroso, poi di nuovo erosione (D-E), si ottiene l’andamento qualitativo rappresentato nel grafico di Figura 7.1b.

In particolare, trascurando il piccolo ciclo di isteresi formato dai tratti BC (scarico) e CB (ricarico), si può osservare che:

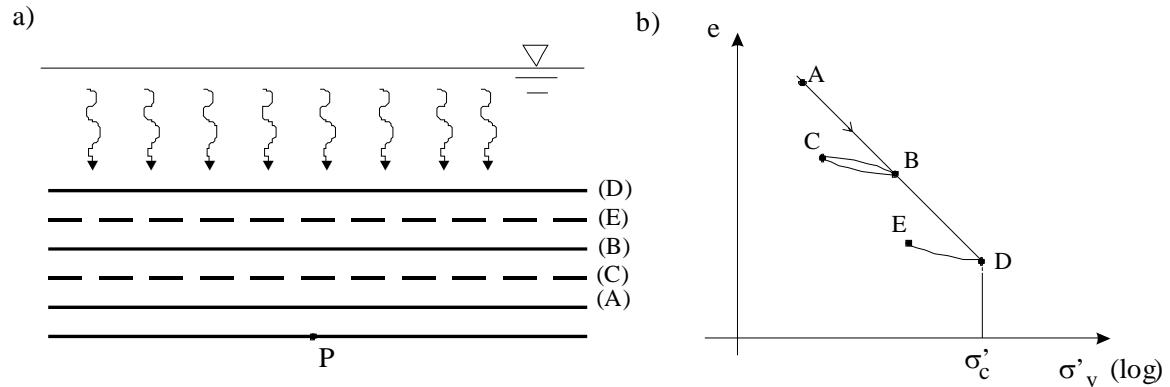


Figura 7.1 - Sedimentazione in ambiente lacustre con più cicli di carico e scarico (a) e variazione dell'indice dei vuoti con la pressione verticale efficace (b): A→B: compressione vergine, B→C: decompressione, C→B: ricompressione, B→D: compressione vergine, D→E: decompressione.

- nelle fasi di primo carico (compressione vergine, tratti AB e BD) il comportamento deformativo del terreno è elasto-plastico, poiché nella successiva fase di scarico una sola parte delle variazioni di indice dei vuoti (e quindi delle deformazioni) viene recuperata;
- i tratti di primo carico appartengono alla stessa retta;
- nelle fasi di scarico e ricarico (tratti BC, CB e DE) il comportamento deformativo è elastico ma non elastico-lineare (il grafico di Figura 7.1b è in scala semilogaritmica);
- sia in fase di carico vergine che in fase di scarico e ricarico, essendo la relazione $e-\sigma'_v$ rappresentata da una retta in scala semilogaritmica, per ottenere un assegnato decremento dell'indice dei vuoti, Δe , occorre applicare un incremento di tensione verticale efficace $\Delta\sigma'_v$ tanto maggiore quanto più alto è il valore di tensione iniziale, ovvero la rigidità del terreno cresce progressivamente con la tensione applicata.

La massima pressione verticale efficace sopportata dall'elemento di terreno considerato è detta **pressione di consolidazione (o di preconsolidazione)**, σ'_c (ad esempio, nel caso di Figura 7.1 la pressione di consolidazione è rappresentata dall'ascissa del punto D del grafico). Quando l'elemento di terreno si trovava in un punto appartenente alla retta ABD, era soggetto ad una pressione verticale efficace che non aveva mai subito nel corso della sua storia precedente, ovvero era soggetto alla pressione di consolidazione; nei tratti BC e DE invece era soggetto ad una pressione verticale efficace minore di quella di consolidazione. Un terreno il cui punto rappresentativo si trova sulla curva edometrica di carico vergine (ABD) si dice **normalmente consolidato (o normalconsolidato) (NC)**, mentre un terreno il cui punto rappresentativo si trova su una delle curve edometriche di scarico-ricarico (BC, CB, DE) si dice **sovraconsolidato (OC)**.

Il rapporto tra la pressione di consolidazione, σ'_c , e la pressione verticale efficace agente, σ'_{vo} , è detto, come già anticipato nel Capitolo 3, **grado di sovraconsolidazione**:

$$\text{OCR} = \frac{\sigma'_c}{\sigma'_{vo}}$$

In conclusione, si può affermare che in condizioni edometriche (e non solo, come vedremo più avanti) il comportamento del terreno segue, con buona approssimazione, un modello elastico non lineare – plastico ad incrudimento positivo (vedi Capitolo 5).

La pressione di consolidazione rappresenta la soglia elastica (o di snervamento) del materiale. Per valori di tensione inferiori alla pressione di consolidazione (terreno OC) il comportamento è elastico non lineare. Se un terreno NC viene compresso la pressione di consolidazione, ovvero la soglia elastica aumenta di valore (incrudimento positivo).

La compressibilità dei terreni viene studiata in laboratorio mediante la “prova edometrica”, i cui risultati sono comunemente utilizzati per calcolare le deformazioni (e i cedimenti) conseguenti all’applicazione di carichi verticali in terreni a grana fine, come verrà illustrato più in dettaglio nei paragrafi seguenti e nel Capitolo 16 (cedimenti di fondazioni superficiali).

7.2 Determinazione sperimentale della compressibilità edometrica

Per studiare in laboratorio la compressibilità (e , come vedremo in seguito anche la consolidazione) nelle condizioni di carico verticale infinitamente esteso, strati orizzontali, filtrazione e deformazioni solo verticali (quali quelle presenti ad esempio durante il processo di formazione di un deposito per sedimentazione), viene impiegata una prova di compressione a espansione laterale impedita, detta *prova edometrica*.

La prova viene di norma eseguita su provini di terreno a grana fine (argille e limi) indisturbati (ovvero ricavati in modo da alterare il meno possibile la struttura naturale del terreno in situ. Vedi anche Capitolo 12).

I provini, di forma cilindrica e rapporto diametro/altezza (D/H_0) compreso tra 2,5 e 4 (molto spesso $D=6\text{cm}$, $H_0=2\text{cm}$), durante la prova sono lateralmente confinati da un anello metallico, di rigidità tale da potersi considerare indeformabile. L’assenza di deformazioni radiali (che nello schema di formazione di un deposito descritto precedentemente consegue alle condizioni di estensione infinita e stratificazione orizzontale) è garantita dal vincolo meccanico costituito dall’anello. La forma schiacciata del provino è motivata dalle necessità di ridurre al minimo le tensioni tangenziali indesiderate di attrito e di aderenza con la parete dell’anello (che a tal fine viene lubrificata), e di contenere i tempi di consolidazione. Sulle basi inferiore e superiore del provino vengono disposti un disco di carta da filtro e uno di pietra porosa, per favorire il drenaggio. L’insieme provino-anello rigido-pietre porose è posto in un contenitore (cella edometrica) pieno d’acqua, in modo da garantire la totale saturazione del provino durante la prova (Figura 7.2).

Le modalità standard di esecuzione della prova prevedono l’applicazione del carico verticale N per successivi incrementi, ciascuno dei quali è mantenuto il tempo necessario per consentire l’esaurirsi del cedimento di consolidazione primaria² (in genere 24h).

Quindi, diversamente dallo schema di formazione del deposito per sedimentazione, caratterizzato da un incremento graduale e continuo della pressione verticale (totale ed efficace), nella prova edometrica standard la tensione verticale totale è applicata per gradini, con discontinuità. Durante la permanenza di ciascun gradino di carico, viene misurata la variazione di altezza del provino, ΔH , nel tempo (tale informazione consente di studiare l’evoluzione nel tempo dei cedimenti, ovvero il processo di consolidazione, come verrà illustrato nel Paragrafo 7.7). Noto il valore di ΔH è possibile calcolare le deformazioni as-

² La consolidazione primaria è distinta dalla consolidazione secondaria dovuta a fenomeni viscosi (Par. 7.9).

siali (e volumetriche), $\varepsilon_a = \frac{\Delta H}{H_0}$, e le variazioni di indice dei vuoti (Eq. 7.2),

$$\Delta e = \frac{\Delta H}{H_0} \cdot (1 + e_0).$$

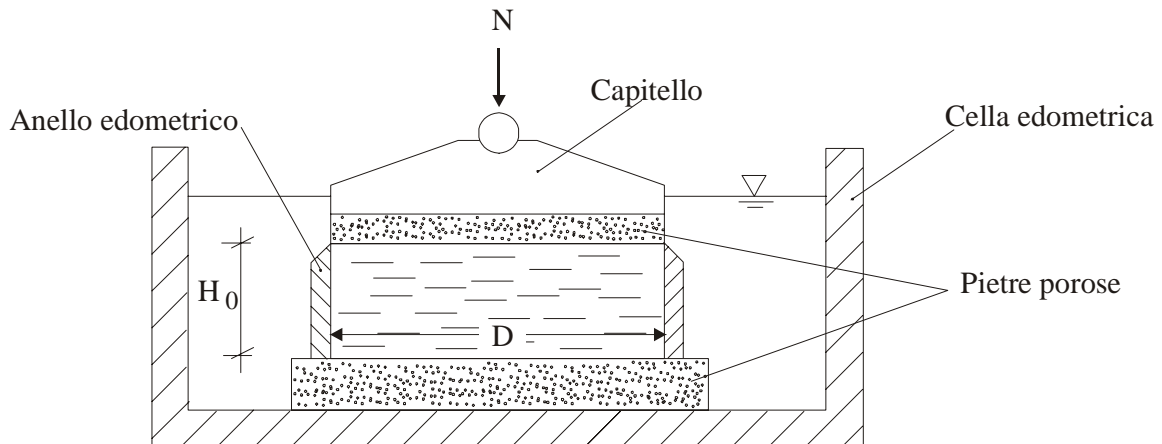


Figura 7.2– Cella edometrica

I valori della deformazione assiale e/o dell'indice dei vuoti corrispondenti al termine del processo di consolidazione primaria per ciascun gradino di carico³ (o più spesso, per comodità ma commettendo un errore, corrispondenti al termine delle 24h di permanenza del carico di ogni gradino), vengono diagrammati in funzione della corrispondente pressione verticale media efficace, $\sigma'_v = \frac{N}{A} = \frac{4 \cdot N}{\pi \cdot D^2}$. Collegando fra loro i punti sperimentali si disegnano le curve di compressibilità edometrica.

Nel grafico in scala semilogaritmica della Figura 7.3, è rappresentato l'andamento dell'indice dei vuoti (asse delle ordinate a sinistra) e della deformazione assiale (asse delle ordinate a destra) in funzione della pressione verticale media efficace, ottenuto sperimentalmente da una prova edometrica standard condotta su un provino “indisturbato” di argilla⁴ (le due curve

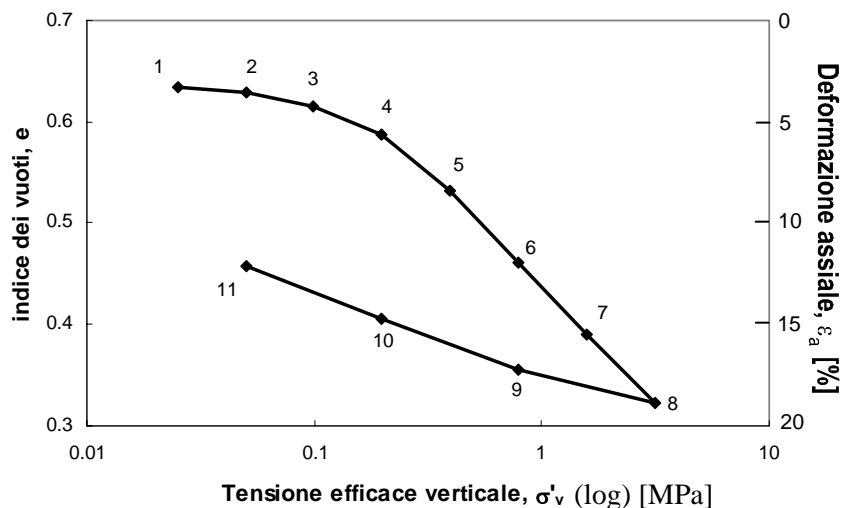


Figura 7.3 – Esempio di risultati di prova edometrica

³ Le altezze del provino corrispondenti all'inizio e alla fine del processo di consolidazione primaria, per ciascun gradino di carico, si determinano mediante opportune procedure descritte nei Paragrafi 7.7.1 e 7.7.2.

⁴ Si osservi che i punti sperimentali hanno passo costante in ascissa. Essendo la scala delle ascisse logaritmica, ciò significa che gli incrementi di carico sono applicati con progressione geometrica. Nella fase di

sono omologhe, in quanto le variabili ε_a e Δe sono proporzionali).

Nel grafico si individuano tre tratti per la fase di carico:

- un tratto iniziale a debole pendenza (punti 1-2)
- un tratto intermedio a pendenza crescente (punti 2-5)
- un tratto finale a pendenza maggiore e quasi costante (punti 5-8).

La curva di scarico (punti 9-11) ha pendenza minore e quasi costante.

Il grafico può essere interpretato, alla luce di quanto detto al paragrafo precedente, tenendo conto della storia tensionale e deformativa subita dal provino di terreno. Il provino, quando si trovava in sito, era soggetto alla pressione litostatica. Durante il campionamento, l'estrazione, il trasporto, l'estrusione dal campionatore, ha subito una serie di disturbi (inevitabili) ed una decompressione fino a pressione atmosferica in condizioni di espansione libera⁵. A causa della decompressione il provino si è espanso e, a parità di contenuto in acqua, è diminuito il grado di saturazione e si sono generate pressioni neutre negative (vedi Capitolo 9). Poi è stato fustellato con l'anello metallico della prova edometrica⁶ e inserito nella cella riempita d'acqua, dove assorbendo acqua in condizioni di espansione laterale impedita ha in parte rigonfiato. Infine è iniziata la fase di carico. Il tratto iniziale della curva di Figura 7.3 (punti 1-2) corrisponde perciò ad un ricompressione in condizioni edometriche che tuttavia segue ad uno scarico (non rappresentato nel grafico) non edometrico. Perciò il primo tratto non è rettilineo, e comunque non ha pendenza eguale a quella del ramo di scarico.

Il secondo tratto della curva (punti 2-5) è marcatamente curvilineo e comprende il valore

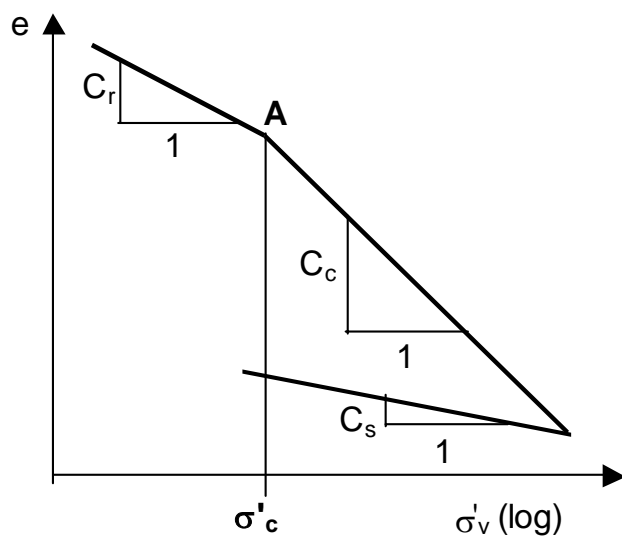


Figura 7.4 - Schematizzazione della curva di compressione edometrica

della pressione di consolidazione in sito, la cui determinazione sperimentale viene di norma eseguita con la costruzione grafica di Casagrande, descritta nel seguito.

Il terzo tratto della curva di carico (punti 5-8) corrisponde ad una compressione edometrica vergine o di primo carico.

Il grafico di Figura 7.3 viene utilizzato per stimare i parametri di compressibilità.

A tal fine, la curva sperimentale di compressione edometrica $e-\sigma'_v$, in scala semilogaritmica (Figura 7.3), viene approssimata, per le applicazioni pratiche, con tratti rettilinei a

scarico il numero di punti sperimentali è minore (in genere la metà). Il primo gradino di carico è generalmente pari a 25 kPa, l'ultimo gradino deve essere tale da superare abbondantemente la pressione di preconsolidazione ($6\div 8 \sigma'_c$)

⁵ Poiché il disturbo da campionamento è inevitabile, specie per i terreni normalmente consolidati, nessuna prova di laboratorio può riprodurre esattamente le condizioni in sito.

⁶ Per ridurre il disturbo prodotto dal fustellamento l'anello ha un bordo tagliente con parete interna verticale (vedi Figura 7.4).

differente pendenza⁷ (Figura 7.4); il tratto di ginocchio a pendenza crescente è sostituito con un punto angolare (punto A), corrispondente alla pressione di consolidazione, σ'_c . La pendenza del tratto iniziale è detta **indice di ricomprensione**, C_r , e non è molto significativo per i motivi sopradetti. La pendenza del tratto successivo al ginocchio, ovvero alla pressione di consolidazione, è detta **indice di compressione**, C_c . La pendenza nel tratto di scarico tensionale è detta **indice di rigonfiamento**, C_s ⁸.

Valori tipici di C_c sono compresi tra 0.1 e 0.8; C_s è dell'ordine di 1/5÷1/10 del valore di C_c . Per una stima approssimata dell'indice di compressione per argille N.C. si può ricorrere alla seguente relazione:

$$C_c = 0,009 (w_L - 10) \quad (\text{Eq. 7.3})$$

Per determinare la pressione di preconsolidazione sono state proposte varie procedure, tra cui la più comunemente utilizzata è quella di Casagrande, che prevede i seguenti passi (Figura 7.5):

1. si determina il punto di massima curvatura (M) del grafico semilogaritmico $e - \sigma'_v$
2. si tracciano per M la retta tangente alla curva (t), la retta orizzontale (o), e la retta bisettrice (b) dell'angolo formato da t ed o
3. l'intersezione di b con la retta corrispondente al tratto terminale della curva di primo carico individua la pressione di preconsolidazione.

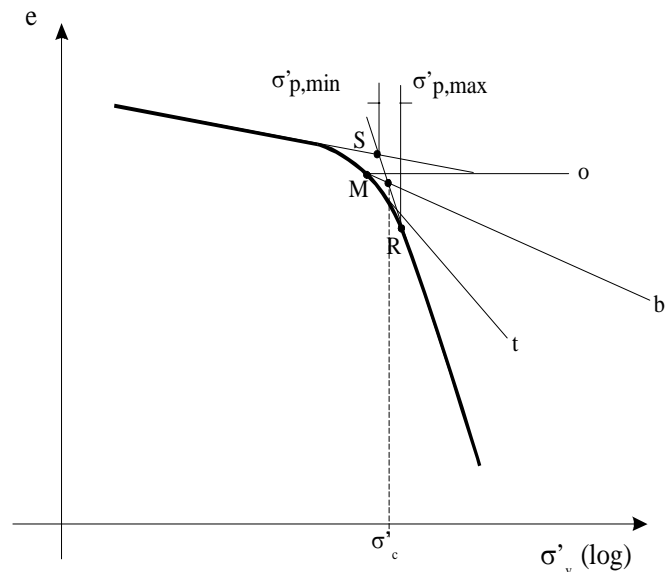


Figura 7.5 – Determinazione della pressione di preconsolidazione σ'_c con il metodo di Casagrande

Considerate le difficoltà spesso esistenti nell'individuare il punto di massima curvatura, è utile confrontare sempre il valore di σ'_c ottenuto, con i suoi possibili limiti inferiore e superiore:

- il primo è rappresentato dall'ascissa del punto di intersezione tra la retta di ricomprensione e quella di compressione vergine (punto S);
- il secondo dall'ascissa del punto R a partire dal quale la relazione $e - \log \sigma'_v$ diventa una retta.

Confrontando il valore della σ'_c , determinato sperimentalmente, con la tensione verticale efficace σ'_{v0} (calcolata) esistente in sito alla quota di prelievo del campione, si determina il grado di sovraconsolidazione OCR del deposito in esame (nel punto di prelievo del campione).

⁷ Le pendenze nei diversi tratti sono date dal rapporto adimensionale $\frac{\Delta e}{\Delta \log_{10} \sigma'_v}$.

⁸ Sarebbe buona norma fare eseguire in laboratorio un intero ciclo di scarico-ricarico e determinare l'indice di rigonfiamento come pendenza dell'asse del ciclo di isteresi.

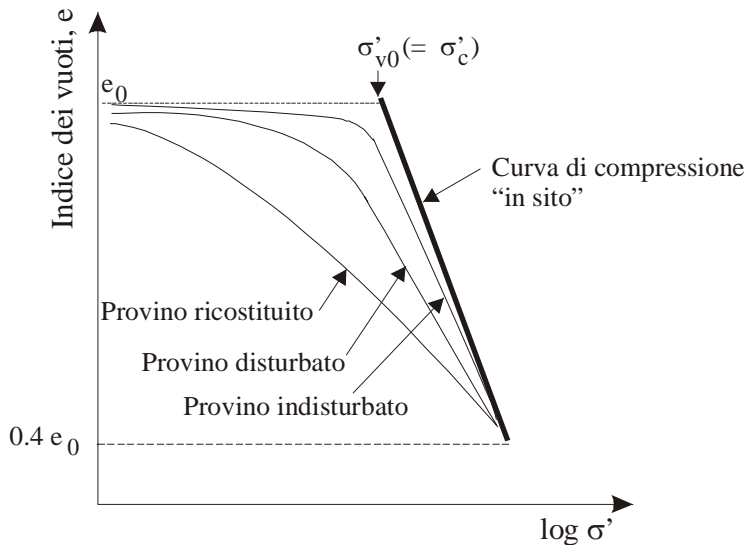


Figura 7.6 – Effetto del disturbo sulla curva di compressibilità edometrica

zazione della prova si può ricorrere alle costruzioni di Schmertmann (1955).

In Figura 7.6 sono mostrate le curve di compressione edometrica di tre provini della stessa argilla con differente grado di disturbo e la curva di compressione in sito.

È stato osservato che, indipendentemente dal grado di disturbo le tre curve convergono in un punto che corrisponde ad un indice dei vuoti pari al 40% del valore iniziale. È pertanto ragionevole assumere che anche la curva che si riferisce alle condizioni in sito passi da quel punto. Schmertmann (1955) ha proposto di definire la curva di compressione in sito nel modo seguente:

per terreno NC (Figura 7.7):

1. si determina l'indice dei vuoti naturale del provino in sito, e_0 , (in base al contenuto naturale in acqua, w_n , ed al peso specifico dei costituenti solidi, γ_s) e si prolunga la curva sperimentale di compressione fino ad un valore dell'indice dei vuoti pari al 40% del valore naturale (punto B);
2. si stima la pressione verticale efficace geostatica alla profondità di estrazione del campione, σ'_{v0} , che per terreno NC coincide con la pressione di consolidazione, σ'_c ;
3. si disegna il punto A di coordinate (σ'_{v0}, e_0) ;
4. si traccia la retta AB che corrisponde alla migliore stima della curva di compressibilità in sito.

per terreno OC (Figura 7.8):

1. si esegue un programma di carico della prova edometrica comprendente un ciclo completo di scarico-ricarico a partire da una pressione superiore alla pressione di consolidazione (presunta)⁹, e si determina l'indice di rigonfiamento C_s come pendenza dell'asse del ciclo di isteresi, CD;
2. si determina l'indice dei vuoti naturale del provino in sito, e_0 , e si prolunga la curva sperimentale di compressione fino ad un valore dell'indice dei vuoti pari al 40% del valore naturale (punto B);

⁹ Se il terreno è fortemente sovraconsolidato e durante la prova edometrica non è superata la pressione di consolidazione, si ottiene una curva priva di tratti rettilinei che spesso viene male interpretata ed attribuita a disturbo o a errore di sperimentazione.

La qualità del campione costituisce il requisito più importante per una affidabile determinazione delle pendenze e della σ'_c . Il disturbo tende infatti a distruggere in parte o in tutto la struttura del terreno e le informazioni in essa contenute (in particolare la memoria dello stato tensionale), rendendo meno pronunciato il passaggio dal tratto di ricomprensione a quello di compressione, e alterando le pendenze rispetto alla curva in sito.

Per migliorare l'interpreta-

3. si stima la pressione verticale efficace geostatica alla profondità di estrazione del campione, σ'_{v0} ;
4. si disegna il punto A di coordinate (σ'_{v0}, e_0) ;
5. si stima la pressione di consolidazione, σ'_c , con il metodo di Casagrande;
6. si traccia dal punto A una retta di pendenza C_s fino al punto E avente ascissa σ'_c (A-E);
7. si traccia la retta EB;
8. la spezzata AEB corrisponde alla migliore stima della curva di compressibilità in sito.

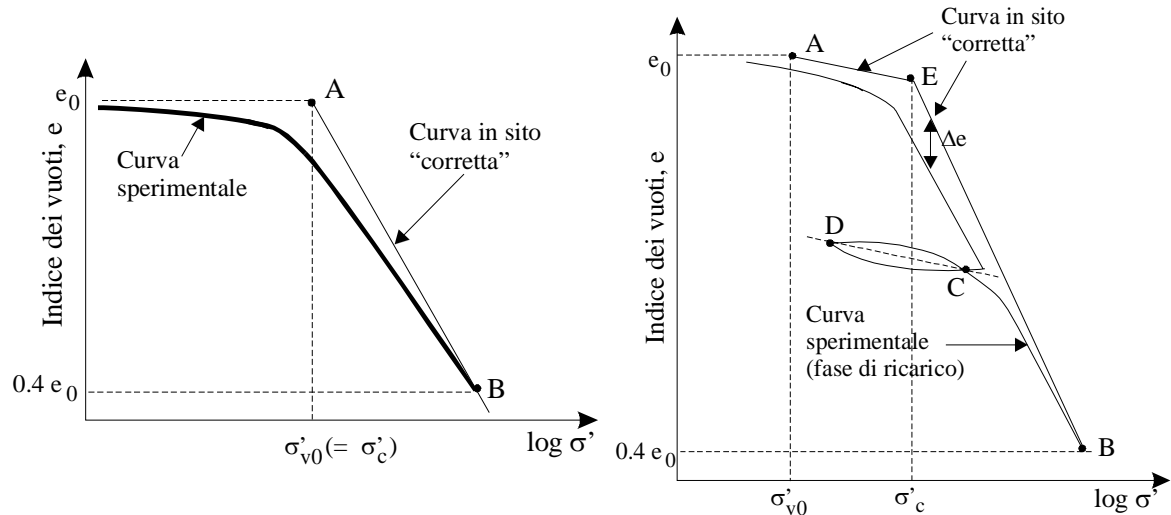


Figura 7.7: Costruzione di Schmertmann per terreno NC

Figura 7.8: Costruzione di Schmertmann per terreno OC

I valori sperimentali della deformazione assiale, ϵ_a , e dell'indice dei vuoti, e , ottenuti al termine del processo di consolidazione primaria per ciascun gradino di carico, possono essere rappresentati anche in grafici in scala naturale (e non semilogaritmica). Nella Figura 7.9 sono rappresentati i punti e le curve corrispondenti alla prova di Figura 7.3 (ovviamente anche in questo caso le due curve sono omologhe). La rappresentazione in scala naturale rende ancor più evidente la non linearità e l'aumento di rigidezza al crescere della tensione applicata.

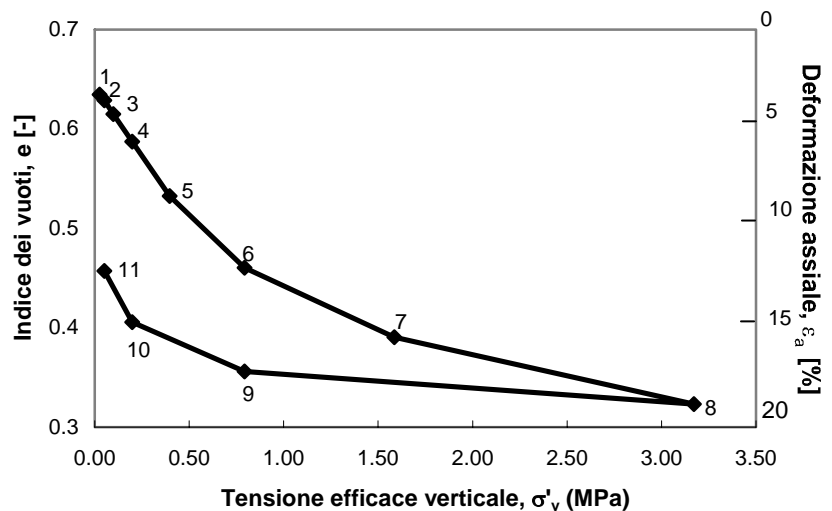


Figura 7.9: Risultati della prova di Figura 7.5 rappresentati in scala naturale

Dalla curva $(\sigma'_v - \varepsilon_a)$ di Figura 7.9 si definiscono i seguenti parametri di compressibilità che, a differenza di C_c e di C_s , sono dipendenti dal campo di tensione cui si riferiscono:

- il **coefficiente di compressibilità di volume**:

$$m_v = \frac{\Delta \varepsilon_a}{\Delta \sigma'_v} \quad [F^{-1} L^2] \quad (\text{Eq. 7.4})$$

- e, il suo reciproco, il **modulo edometrico**:

$$M = \frac{1}{m_v} = \frac{\Delta \sigma'_v}{\Delta \varepsilon_a} \quad [F L^{-2}] \quad (\text{Eq. 7.5})$$

Dalla curva $(\sigma'_v - e)$ di Figura 7.9 si definisce:

- il **coefficiente di compressibilità**:

$$a_v = \frac{\Delta e}{\Delta \sigma'_v} \quad [F^{-1} L^2] \quad (\text{Eq. 7.6})$$

e valgono le relazioni:

$$m_v = \frac{a_v}{1 + e_o} = \frac{1}{M} \quad (\text{Eq. 7.7})$$

$$M = 2,3 \cdot \frac{(1 + e_o)}{C_c} \cdot \sigma'_v \quad (\text{Eq. 7.8})$$

Valori orientativi di M , in funzione di I_c , per terreni coesivi sono riportati in Tabella 7.1.

Tabella 7.1 - Valori orientativi di M per terreni coesivi (nel campo dei valori di σ'_v più frequenti per i problemi di ingegneria geotecnica)

I_c	0-0,5	0,5-0,75	0,75-1	> 1
M (MPa)	0,2-4	4-12	12-30	30-60

7.3 Calcolo del cedimento totale di consolidazione primaria

Utilizzando i parametri appena definiti e determinabili mediante la prova edometrica è possibile calcolare il cedimento di uno strato di terreno al quale è applicato un carico uniformemente distribuito $\Delta \sigma'_v$, nel caso in cui possa ritenersi soddisfatta l'ipotesi di deformazione monodimensionale.

In pratica il comportamento dello strato viene assimilato a quello di un provino sottoposto ad una prova edometrica (Figura 7.10), assumendo che i parametri di compressibilità dello strato siano uguali a quelli determinati per il provino.

Ricordando che in condizioni edometriche:

$$\frac{\Delta H}{H_o} = \frac{\Delta e}{1 + e_o} \quad (\text{Eq. 7.9})$$

Il cedimento ΔH sarà dato da :

$$\Delta H = \frac{H_o}{1 + e_o} \cdot \Delta e \quad (\text{Eq. 7.10})$$

dove H_o è l'altezza iniziale dello strato, e_o è l'indice dei vuoti iniziale e Δe la variazione dell'indice dei vuoti, conseguente all'applicazione del carico, che può essere ricavata dai risultati della prova edometrica.

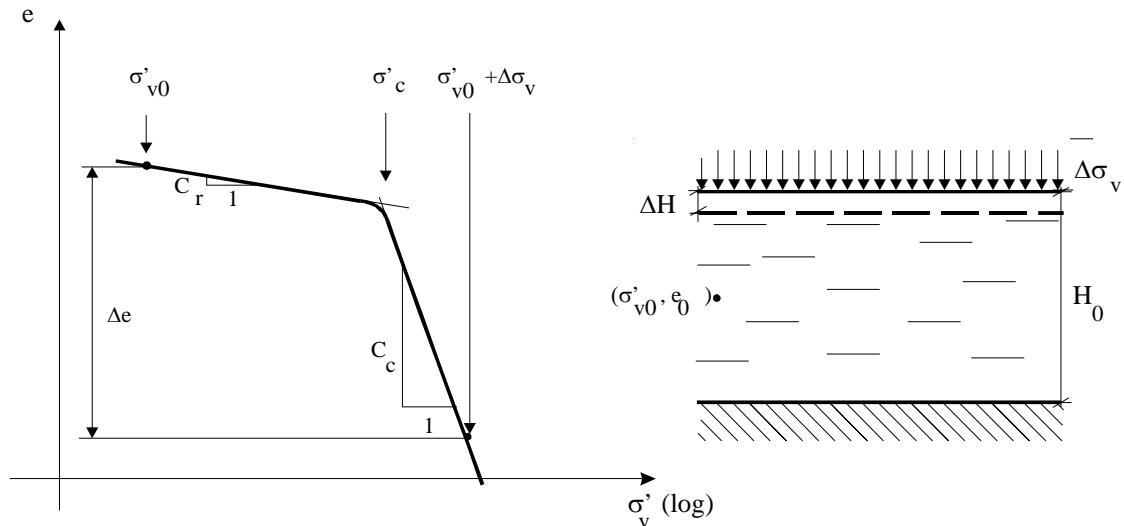


Figura 7.10 – Schema per il calcolo del cedimento di consolidazione primaria di uno strato di terreno coesivo

Facendo riferimento al grafico $e-\log\sigma'_v$ si può infatti osservare che nel caso più generale di terreno sovraconsolidato (assumendo $C_r = C_s$):

$$\Delta e = C_s \cdot \log \frac{\sigma'_c}{\sigma'_{v0}} + C_c \cdot \log \frac{\sigma'_{v0} + \Delta\sigma_v}{\sigma'_c} \quad (\text{Eq. 7.11})$$

da cui consegue:

$$\Delta H = \frac{H_0}{1 + e_0} \cdot [C_s \cdot \log \frac{\sigma'_c}{\sigma'_{v0}} + C_c \cdot \log \frac{\sigma'_{v0} + \Delta\sigma_v}{\sigma'_c}] \quad (\text{Eq. 7.12})$$

Se il carico applicato è tale da non far superare la σ'_c , si ha invece:

$$\Delta e = C_s \cdot \log \frac{\sigma'_{v0} + \Delta\sigma_v}{\sigma'_{v0}} \quad (\text{Eq. 7.13})$$

e quindi:

$$\Delta H = \frac{H_0}{1 + e_0} \cdot [C_s \cdot \log \frac{\sigma'_{v0} + \Delta\sigma_v}{\sigma'_{v0}}] \quad (\text{Eq. 7.14})$$

Se il terreno invece è normalconsolidato:

$$\Delta e = C_c \cdot \log \frac{\sigma'_{v0} + \Delta\sigma_v}{\sigma'_{v0}} \quad (\text{Eq. 7.15})$$

e quindi

$$\Delta H = \frac{H_0}{1 + e_0} \cdot [C_c \cdot \log \frac{\sigma'_{v0} + \Delta\sigma_v}{\sigma'_{v0}}] \quad (\text{Eq. 7.16})$$

In alternativa ai parametri C_c e C_s , si può fare riferimento al coefficiente di compressibilità di volume m_v , o al modulo edometrico M , o al coefficiente di compressibilità a_v :

$$\Delta H = H_0 \cdot \Delta\sigma_v \cdot m_v = H_0 \cdot \frac{\Delta\sigma_v}{M} = \frac{H_0}{1 + e_0} \cdot \Delta\sigma_v \cdot a_v \quad (\text{Eq. 7.17})$$

tenendo conto del fatto che tali parametri dipendono dal livello di tensione e quindi vanno scelti opportunamente in funzione dell'intervallo tensionale significativo per il problema in esame.

Nella pratica, soprattutto in presenza di strati di elevato spessore e non omogenei, è opportuno per una stima migliore del cedimento, suddividere lo strato in più sottostrati, eventualmente differenziando i parametri di compressibilità del terreno (laddove siano disponibili un certo numero di prove edometriche eseguite su provini estratti a differenti profondità). Il cedimento complessivo dello strato risulta essere così espresso:

$$\Delta H = \sum_{i=1}^n \frac{H_{oi}}{1 + e_{oi}} \cdot [C_{si} \cdot \log \frac{\sigma'_{ci}}{\sigma'_{voi}} + C_{ci} \cdot \log \frac{\sigma'_{voi} + \Delta\sigma_{vi}}{\sigma'_{ci}}] \quad (\text{Eq. 7.18})$$

oppure:

$$\Delta H = \sum_{i=1}^n (H_{oi} \cdot \Delta\sigma_{vi} \cdot m_{vi}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{H_{oi}}{1 + e_{oi}} \cdot \Delta\sigma_{vi} \cdot a_{vi} \right) \quad (\text{Eq. 7.19})$$

dove le pressioni ed i parametri di compressibilità sono riferiti alla mezzeria di ciascuno degli n sottostrati, di spessore H_{oi} .

Nell'ipotesi di carico, q , applicato in superficie, uniformemente distribuito ed infinitamente esteso, il conseguente incremento della tensione verticale totale, $\Delta\sigma_v$, che compare nelle Eq. 7.10 – 7.18, è costante sia in direzione orizzontale che al variare della profondità ed è pari al carico applicato ($\Delta\sigma_v = q$). Nel caso in cui il carico sia distribuito su una superficie di dimensioni limitate (rispetto allo spessore dello strato) il valore di $\Delta\sigma_v$ si riduce al crescere della profondità e varia in direzione orizzontale; tale incremento può essere determinato con riferimento alla teoria dell'elasticità (vedi Capitolo 6) in funzione della geometria della superficie di carico. In prima approssimazione, nel caso di carico q uniformemente distribuito su un'area rettangolare, il valore di $\Delta\sigma_v$ può essere stimato al variare della profondità z , ipotizzando che il carico si diffonda con un rapporto 2:1 (Figura 7.11). Alla profondità z risulta, quindi:

$$\Delta\sigma_v(z) = \frac{q \cdot L \cdot B}{(L + z) \cdot (B + z)} \quad (\text{Eq. 7.20})$$

Nelle Eq. 7.17 e 7.18 il valore dell'incremento di pressione verticale, $\Delta\sigma_{vi}$, è riferito alla mezzeria di ciascun sottostrato.

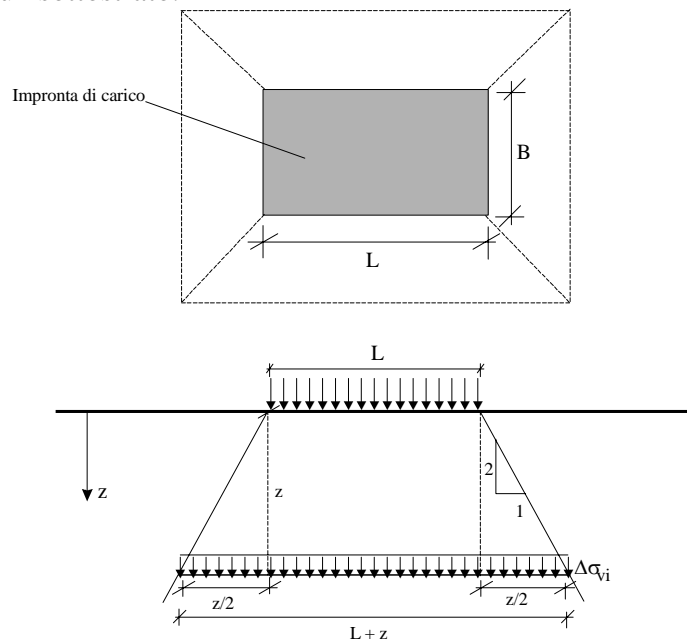


Figura 7.11 – Schema semplificato per il calcolo della diffusione delle tensioni

7.4 Consolidazione

Come già evidenziato nei paragrafi precedenti, l'applicazione di un sistema di sollecitazioni induce nel terreno un sistema di distorsioni (cambiamenti di forma) e/o di deformazioni (variazioni di volume).

Essendo i terreni mezzi particellari costituiti da grani solidi e vuoti, con i grani solidi praticamente incompressibili, ogni variazione di volume di un elemento di terreno corrisponde ad una variazione del volume dei vuoti. Inoltre, se il terreno è saturo, ovvero se tutti i vuoti sono riempiti d'acqua, essendo l'acqua praticamente incompressibile, una variazione di volume comporta un moto di filtrazione dell'acqua interstiziale: in allontanamento dall'elemento di terreno se il volume si riduce, in entrata nell'elemento se il volume aumenta.

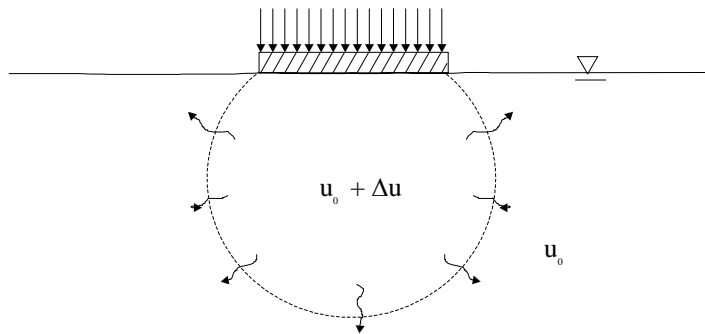


Figura 7.12 – Campo di sovrappressioni generato in un terreno a grana fine in seguito all'applicazione di un carico

Il processo di espulsione dell'acqua dai pori avviene quando, per effetto del carico applicato, si genera, all'interno di un certo volume di terreno, un campo di sovrappressioni neutre, Δu , variabile da punto a punto. La conseguente differenza di carico idraulico, rispetto alle condizioni di equilibrio, provoca l'instaurarsi di un flusso dell'acqua in regime transitorio dai punti a energia maggiore verso i punti a energia minore, e

in particolare verso l'esterno della zona interessata dall'incremento delle pressioni interstiziali (Figura 7.12).

Come già osservato nell'introduzione di questo Capitolo, via via che l'acqua viene espulsa dai pori, le particelle di terreno si deformano e si assestano in una configurazione più stabile e con meno vuoti, con conseguente diminuzione di volume.

La velocità di questo processo dipende dalla permeabilità del terreno. L'entità della variazione di volume, dipende dalla rigidità dello scheletro solido, cioè dalla struttura del terreno.

Escludendo le sollecitazioni di natura dinamica e riferendosi quindi solo al caso di carichi statici o quasi statici, nei terreni a grana grossa (ghiaie e sabbie), a causa della loro elevata permeabilità ($k > 10^{-6}$ m/s), l'espulsione dell'acqua è praticamente istantanea e quindi anche la deformazione volumetrica. Nel caso dei terreni a grana fine (limi e argille), invece, a causa della loro scarsa permeabilità ($k < 10^{-6}$ m/s) l'espulsione dell'acqua dai pori con dissipazione delle sovrappressioni neutre, e quindi la deformazione volumetrica, risulta differita nel tempo. Questo fenomeno, caratterizzato da un legame tensioni-deformazioni-tempo, viene indicato con il termine **consolidazione**.

7.5 Consolidazione edometrica

Si consideri un deposito di terreno sabbioso, saturo e sotto falda, infinitamente esteso e delimitato superiormente da una superficie piana. Ad una certa profondità sia presente uno strato orizzontale di argilla di spessore costante H e infinitamente esteso.

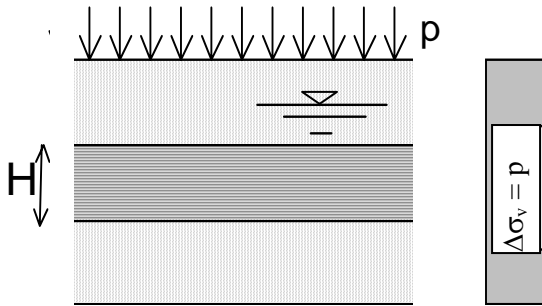


Figura 7.13 - Schema di carico edometrico

Supponiamo che su tutta la superficie del deposito venga istantaneamente applicata una pressione verticale uniforme p (Figura 7.13). In ogni punto del semispazio si produce istantaneamente un incremento di tensione verticale totale $\Delta\sigma_v = p$. Per ragioni di simmetria non possono esservi deformazioni orizzontali.

Nella sabbia, molto permeabile, si manifestano (quasi) immediatamente deformazioni verticali (e volumetriche), con il relativo cedimento del piano campagna:

l'incremento di tensione totale determina (quasi immediatamente) un eguale incremento della tensione efficace (sopportata dallo scheletro solido), mentre l'acqua in eccesso filtra rapidamente in direzione verticale e la pressione interstiziale (praticamente) non varia. I grani si deformano e si addensano con riduzione dei vuoti, e quindi di volume. Si dice che la sabbia costituisce un sistema aperto.

Nell'argilla, poco permeabile, la filtrazione avviene molto più lentamente e tutto il fenomeno, sopra descritto per la sabbia, è molto rallentato.

La **teoria della consolidazione edometrica**¹⁰ (ovvero monodimensionale) di Terzaghi affronta il problema della determinazione dei modi e dei tempi in cui si svolge tale fenomeno.

Per introdurre la teoria della consolidazione monodimensionale è utile riferirsi allo schema meccanico rappresentato in Figura 7.14: un cilindro indeformabile pieno di acqua contenente un pistone a tenuta idraulica collegato ad una molla a comportamento elastico lineare. Si assume che l'acqua sia incompressibile. Il pistone è attraversato da un condotto che termina in una valvola che, se aperta, lascia filtrare una portata d'acqua limitata. Un manometro misura la pressione dell'acqua all'interno del cilindro. La valvola è inizialmente aperta e la pressione idrostatica dell'acqua è assunta come zero di riferimento. Al tempo $t=t_1$ la valvola viene chiusa e contemporaneamente è applicata una forza verticale Q sul pistone. Poiché l'acqua non può filtrare, il pistone non ha cedimenti, la molla non si comprime e quindi non sostiene alcun carico. Il carico applicato Q è equilibrato da un incremento della pressione dell'acqua, che viene registrata dal manometro, pari a $\Delta u_w(t_1) = Q/A$, essendo A la sezione retta del cilindro. Al tempo $t=t_2$ la valvola viene aperta e l'acqua, per effetto della pressione, inizia a filtrare verso l'esterno nei limiti consentiti dalle caratteristiche della valvola. Alla progressiva diminuzione di volume occupato dall'acqua corrisponde un progressivo cedimento del pistone e quindi un progressivo accorciamento della molla $\Delta l(t)$. Tale accorciamento è proporzionale alla forza sostenuta dalla molla. Al generico istante $t_i > t_2$ la forza Q è equilibrata in parte dalla reazione della molla, Q_M , e in parte dalle sovrappressioni residua dell'acqua, Q_w :

$$Q = Q_M(t) + Q_w(t) = K \cdot \Delta l(t) + \Delta u_w(t) \cdot A \quad (\text{Eq. 7.21})$$

in cui si è indicato con K la costante elastica della molla. Il manometro registra una progressiva diminuzione della pressione dell'acqua nel tempo.

¹⁰ Si osservi che la prova edometrica riproduce quasi esattamente le condizioni di carico e di vincolo descritte e rappresentate in Figura 7.13.

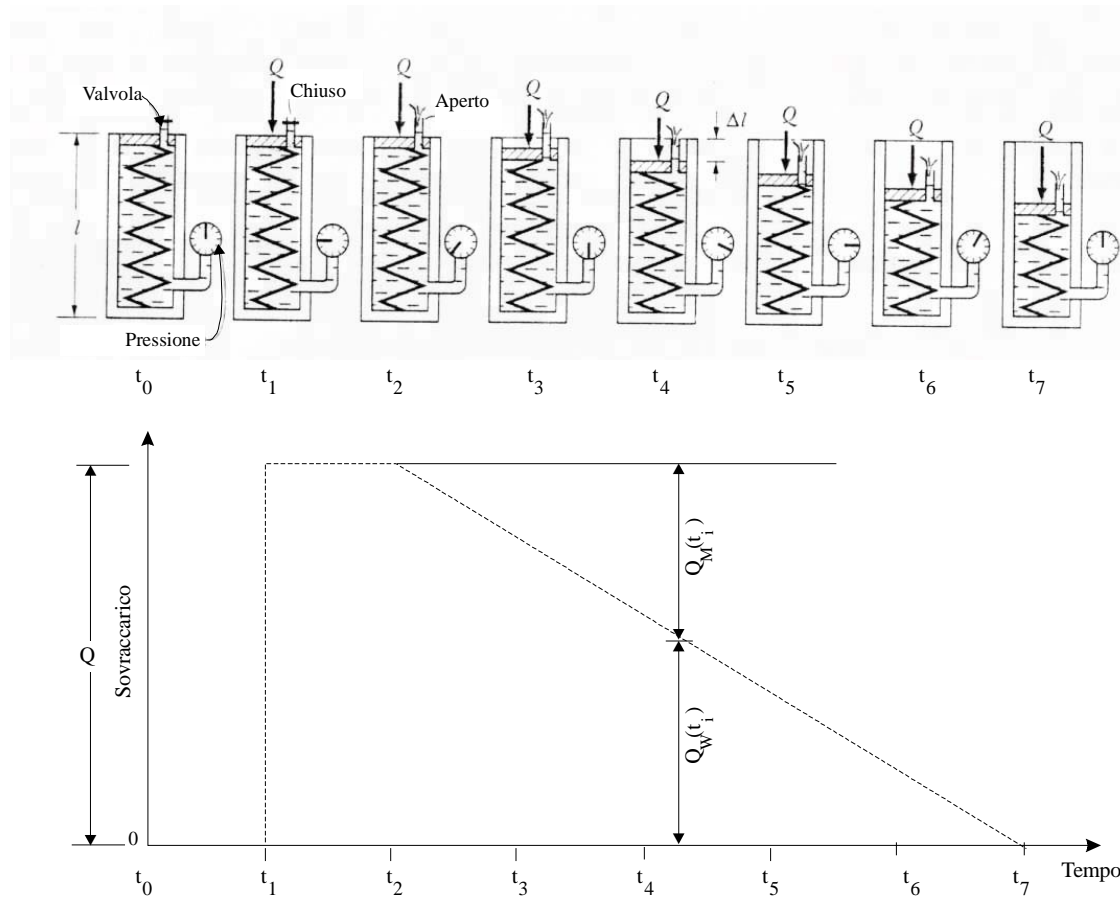


Figura 7.14 – Modello meccanico di elasticità ritardata

Al tempo $t=t_7$ il processo si esaurisce. La molla sostiene per intero il carico Q , la sovrappressione dell'acqua si è interamente dissipata.

Quanto appena descritto rappresenta in maniera semplificata ciò che accade in un terreno coesivo durante il processo di consolidazione edometrica: inizialmente il sovraccarico applicato è sopportato quasi esclusivamente dall'acqua interstiziale. Gradualmente l'acqua viene espulsa dai pori, con filtrazione verticale, e il carico viene trasferito allo scheletro solido che si comprime, con conseguente aumento delle pressioni effettive. Alla fine del processo di consolidazione tutte le sovrappressioni neutre si sono dissipate e il sovraccarico totale applicato è interamente sopportato dallo scheletro solido (cioè interamente equilibrato da un incremento delle pressioni verticali efficaci).

Un altro, più completo modello meccanico, utile a introdurre la teoria della consolidazione edometrica è quello proposto da Terzaghi e rappresentato in Figura 7.15. Esso consiste in un recipiente cilindrico contenente una serie di pistoni forati, eguali fra loro, separati da molle di eguale rigidità, e riempito d'acqua. Ciascuna zona di interpiano in cui risulta suddiviso il recipiente tramite i pistoni è collegata ad un tubo aperto per la misura del carico piezometrico. Applicando un incremento di pressione $\Delta\sigma$ (rispetto alla pressione esistente in condizioni di equilibrio) si osserva che questo è istantaneamente sopportato dall'acqua. L'altezza di risalita dell'acqua in tutti i piezometri nell'istante di applicazione del carico ($t=0$) è data da $\Delta\sigma/\gamma_w$. La differenza di carico idraulico innesca una filtrazione

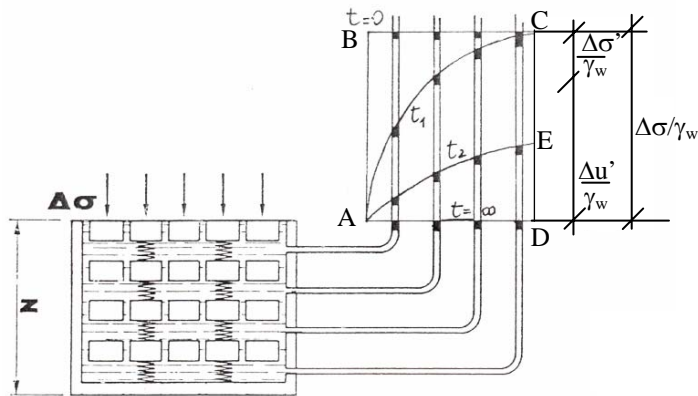


Figura 7.15 - Modello meccanico di Terzaghi

verticale ascendente verso la superficie a pressione atmosferica. Col passare del tempo la pressione dell'acqua nelle varie zone si riduce gradualmente, ed entrano in compressione le molle, a partire dalla parte più alta del recipiente. Al generico istante di tempo t in un dato interpiano, la pressione dell'acqua e l'altezza d'interpiano saranno inferiori rispetto a quelle dell'interpiano sottostante. Il processo continua finché, dopo un tempo relativamente lungo,

la sovrappressione dell'acqua in tutte le zone si sarà interamente dissipata e la distanza di interpiano sarà eguale (la pressione neutra assume il valore esistente prima dell'applicazione del sovraccarico in condizioni di equilibrio, i dischi si saranno avvicinati della quantità corrispondente alla pressione sopportata dalle molle).

Con riferimento allo schema di Figura 7.15 si osservi che l'area del rettangolo ABCD è proporzionale al carico totale applicato $Q = \Delta\sigma A_r$ (essendo A_r l'area della sezione retta del recipiente) e che ad un generico istante di tempo (ad esempio $t=t_2$) l'area ABCE è proporzionale alla quota parte di Q sostenuta dalle molle, mentre l'area AED è proporzionale alla quota parte di Q sostenuta dall'acqua.

L'isocrona AE riferita all'asse AD rappresenta la distribuzione delle sovrappressioni neutre con la profondità, e riferita all'asse BC la distribuzione delle tensioni verticali sulle molle. Se le molle sono ad elasticità lineare, e quindi vi è proporzionalità tra tensioni e deformazioni, l'area ABCD è proporzionale al cedimento finale, l'area ABCE è proporzionale al cedimento avvenuto al tempo $t=t_2$, l'isocrona AE riferita all'asse BC rappresenta la distribuzione delle deformazioni verticali al tempo $t=t_2$.

Negli schemi sopra descritti, le molle rappresentano lo scheletro solido, l'acqua nel cilindro rappresenta l'acqua che riempie i pori, i fori sui pistoni rappresentano la permeabilità del terreno.

7.6 Teoria della consolidazione edometrica

La teoria della consolidazione edometrica di Terzaghi si basa sulle seguenti ipotesi semplificative:

1. consolidazione monodimensionale, cioè filtrazione e cedimenti in una sola direzione (verticale);
2. incompressibilità dell'acqua ($\rho_w = \text{cost.}$) e delle particelle solide ($\rho_s = \text{cost.}$);
3. validità della legge di Darcy;
4. terreno saturo, omogeneo, isotropo, con legame sforzi deformazioni elastico lineare, a permeabilità costante nel tempo e nello spazio;
5. validità del principio delle tensioni efficaci.

La teoria è sviluppata a partire dall'equazione generale di flusso (Capitolo 4, Eq. 4.22), che nelle ipotesi suddette diviene:

$$k \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{1}{1+e_o} \frac{\partial e}{\partial t} \tag{Eq. 7.22}$$

Posto $\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial \sigma'_v} \cdot \frac{\partial \sigma'_v}{\partial t}$ e ricordando la definizione del coefficiente di compressibilità:

$$a_v = - \frac{\partial e}{\partial \sigma'_v} \tag{Eq. 7.23}$$

si ha, essendo per ipotesi di elasticità lineare $a_v = \text{cost}$:

$$\frac{k(1+e_o)}{a_v} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = - \frac{\partial \sigma'_v}{\partial t} \tag{Eq. 7.24}$$

Se poi il carico piezometrico h viene espresso come somma dell'altezza geometrica, z , e dell'altezza di pressione, u/γ_w , e la pressione a sua volta viene espressa come somma del termine dovuto alla pressione dei pori in regime stazionario, u_p (in condizioni di equilibrio prima dell'applicazione del sovraccarico) e di quello dovuto all'eccesso di pressione dei pori conseguente all'applicazione del sovraccarico, u_e , si può scrivere, con riferimento allo schema di Figura 7.16:

$$h = z + \frac{(u_p + u_e)}{\gamma_w} \tag{Eq. 7.25}$$

e osservando che la distribuzione delle pressioni in regime stazionario, u_p è lineare con la profondità z , per cui la derivata seconda di u_p rispetto alla profondità è zero, si ha:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{1}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial^2 u_e}{\partial z^2} \tag{Eq. 7.26}$$

Essendo per il principio delle pressioni efficaci (Capitolo 3, Eq. 3.3):

$$\frac{\partial \sigma'_v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_v}{\partial t} - \frac{\partial u_e}{\partial t} \tag{Eq. 7.27}$$

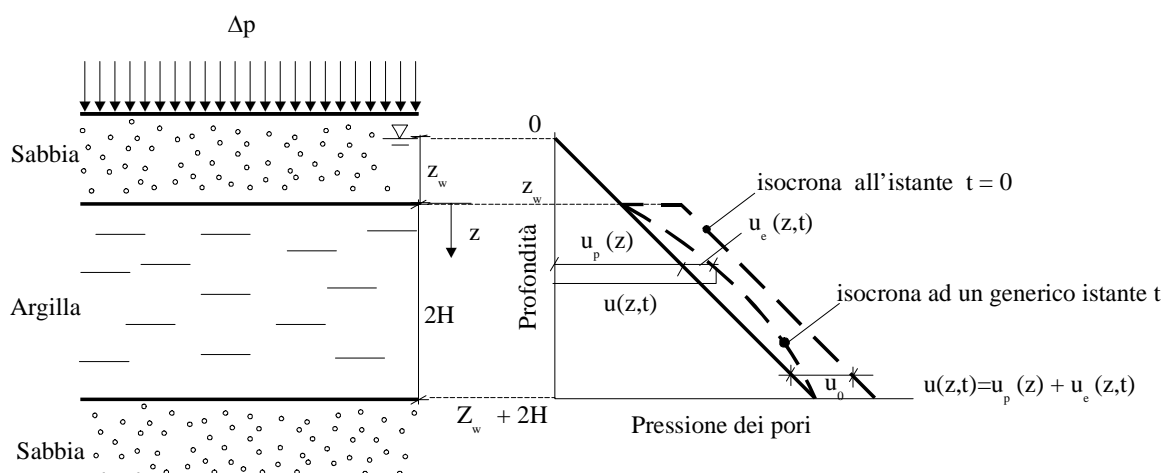


Figura 7.16. – Distribuzione delle pressioni neutre con la profondità durante il processo di consolidazione in condizioni edometriche

e supponendo che il sovraccarico applicato, σ_v , sia costante nel tempo si ha:

$$\frac{\partial \sigma'_v}{\partial t} = - \frac{\partial u_e}{\partial t} \quad (\text{Eq. 7.28})$$

L'equazione di continuità si riduce quindi alla seguente espressione:

$$\frac{k(1+e_o)}{\gamma_w \cdot a_v} \frac{\partial^2 u_e}{\partial z^2} = \frac{\partial u_e}{\partial t} \quad (\text{Eq. 7.29})$$

Il termine:

$$\frac{k(1+e_o)}{\gamma_w \cdot a_v} = \frac{k}{\gamma_w \cdot m_v} = c_v \quad [L^2/T] \quad (\text{Eq. 7.30})$$

è chiamato **coefficiente di consolidazione verticale** e può essere determinato elaborando i risultati della prova edometrica secondo le procedure che verranno descritte nel Paragrafo 7.8. Utilizzando l' Eq.7.30, dopo avere ricavato dalla prova edometrica anche il coefficiente di compressibilità di volume, m_v (Paragrafo 7.2), è possibile ottenere una stima del coefficiente di permeabilità k del terreno. Ovviamente, potendo determinare tanti valori di c_v e di m_v , quanti sono i gradini di carico applicati al provino, si possono ottenere altrettanti valori del coefficiente di permeabilità. In genere si assume come valore più rappresentativo per il terreno in sito quello corrispondente al gradino di carico entro cui ricade la tensione litostatica valutata alla profondità di estrazione del provino.

Con la definizione di c_v (Eq. 7.30), l'equazione differenziale della consolidazione monodimensionale di Terzaghi diventa:

$$c_v \frac{\partial^2 u_e}{\partial z^2} = \frac{\partial u_e}{\partial t} \quad (\text{Eq. 7.31})$$

dove $u_e = u_e(z, t)$ rappresenta, come già detto, il valore dell'eccesso di pressione neutra nel punto a quota z , e al tempo t dall'istante di applicazione del carico.

Vengono definite le due variabili adimensionali:

$$Z = \frac{z}{H} \quad (\text{Eq. 7.32})$$

$$T_v = \frac{c_v \cdot t}{H^2} \quad (\text{chiamato fattore di tempo}) \quad (\text{Eq. 7.33})$$

con H altezza di drenaggio, pari cioè al massimo percorso che una particella d'acqua deve compiere per uscire dallo strato (nel caso di strato doppiamente drenato è pari alla metà dell'altezza dello strato, nel caso di strato da un lato solo è pari allo spessore dell'intero strato).

L'equazione (7.35) può essere così riscritta:

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial Z^2} = \frac{\partial u_e}{\partial T_v} \quad (\text{Eq. 7.34})$$

La soluzione dell'equazione 7.34 dipende dalle condizioni iniziali e dalle condizioni al contorno (due condizioni per z e una per t), in particolare dalle condizioni di drenaggio (da un solo lato o da entrambi i lati) e dalla distribuzione iniziale della sovrappressione u_e

con la profondità z (isocrona iniziale), che nel caso di consolidazione determinata da un carico infinitamente esteso applicato in superficie è uniforme.

Sotto le ipotesi edometriche (Figura 7.16) di:

- isocrona iniziale costante con la profondità (per $t=0$ $u_e = u_o, \forall z$)
- superfici superiore e inferiore perfettamente drenanti (per $z=0$ e $z=2H$ $u_e = 0, \forall t \neq 0$) la soluzione risulta esprimibile in serie di Taylor come:

$$u_e(Z, T_v) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{2u_o}{M} (\sin MZ) e^{-M^2 T_v} \tag{Eq. 7.35}$$

dove: $M = \frac{\pi}{2} (2m + 1)$.

Tale soluzione, che permette (per ogni z e t) di calcolare $u_e(z, t)$ noto c_v , si trova usualmente diagrammata in termini di grado di consolidazione U_z , definito come rapporto tra la sovrappressione dissipata al tempo t e la sovrappressione iniziale u_o , cioè:

$$U_z = \frac{u_o - u_e(z, t)}{u_o} = 1 - \frac{u_e(z, t)}{u_o} \tag{Eq. 7.36}$$

in funzione del fattore di tempo T_v (noto una volta noto c_v).

Un diagramma tipico $U_z = f(Z, T_v)$ è riportato in Figura 7.17.

Da tale soluzione si può osservare che:

- subito dopo l'applicazione del carico si ha un gradiente idraulico elevato alle estremità che si riduce progressivamente verso l'interno dello strato (e nel tempo);
- in mezzeria il gradiente dell'eccesso di pressione è sempre nullo, cioè non vi è alcun flusso attraverso il piano orizzontale a metà dello strato.

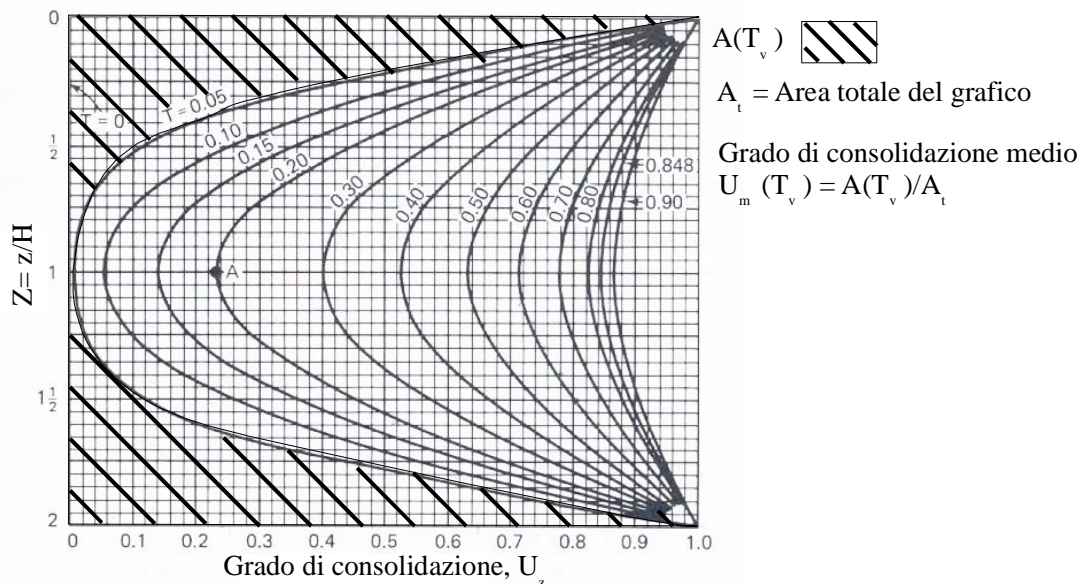


Figura 7.17 – Grado di consolidazione U_z in funzione del fattore di tempo, T_v , e di z/H (Taylor, 1948)

In base a quest'ultima osservazione si ha che il piano di mezzeria può essere considerato impermeabile e pertanto la soluzione può essere estesa anche al caso in cui si abbia uno strato drenato solo ad una estremità, come nel modello meccanico di Figura 7.15, ponendo attenzione alla definizione di altezza di drenaggio che in questo caso è pari all'altezza dello strato.

La soluzione dell'equazione della consolidazione monodimensionale fornisce il decorso nel tempo delle sovrappressioni interstiziali, ma può essere utilizzata anche per la previsione del decorso dei cedimenti nel tempo dell'intero strato. Infatti nella maggior parte dei casi pratici non interessa conoscere il valore del grado di consolidazione U_z in un dato punto dello strato di terreno, ma piuttosto il valore del grado di consolidazione medio dell'intero strato raggiunto dopo un certo periodo di tempo dall'applicazione del carico.

Il grado di consolidazione medio dell'intero strato in termini di sovrappressione interstiziali, corrispondente ad un certo fattore di tempo, T_v , ossia ad un certo istante, t , è dato da:

$$\bar{U} = \frac{\int_0^{2H} [u_o - u_e(z, t)] \cdot dz}{\int_0^{2H} u_o \cdot dz} \quad (\text{Eq. 7.37})$$

Osservando che durante il processo di consolidazione le pressioni efficaci variano della stessa quantità delle pressioni interstiziali, con segno opposto, e che, per l'ipotesi di elasticità lineare, la deformazione verticale è direttamente proporzionale alla pressioni verticale efficace:

$$\frac{u_o - u_e(t)}{u_o} = \frac{\Delta\sigma'(t)}{\Delta\sigma_v} = \frac{M \cdot \varepsilon(t)}{M \cdot \varepsilon_f} = \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_f} \quad (\text{Eq. 7.38})$$

si ha che il grado di consolidazione medio in termini di sovrappressione interstiziali, U , (rapporto tra la sovrappressione dissipata al tempo t e la sovrappressione totale iniziale) coincide con il grado di consolidazione medio in termini di cedimento, U_m , definito come rapporto tra il cedimento al tempo t , $s(t)$, che per definizione è l'integrale delle deformazioni verticali al tempo t , e il cedimento finale totale, s_f :

$$U_m = \frac{\int_0^{2H} \varepsilon(t) \cdot dz}{\int_0^{2H} \varepsilon_f \cdot dz} = \frac{s(t)}{s_f} = \bar{U} \quad (\text{Eq. 7.39})$$

ed è questa l'informazione che generalmente interessa nei casi pratici (interessa conoscere l'aliquota del cedimento totale che si è realizzata dopo un certo tempo dall'applicazione del carico).

Si può osservare che nei grafici U_z - T_v , il valore di U_m corrispondente ad un certo tempo adimensionalizzato T_v , rappresenta il rapporto tra l'area, $A(t)$, compresa tra la linea $U_z=0$ e la relativa curva di T_v e l'area totale del grafico, A_t , (quella compresa tra le linee $U_z=0$ e $U_z=1$). Ad esempio in Figura 7.17 il rapporto tra l'area tratteggiata e l'area totale del grafico rappresenta il grado di consolidazione medio corrispondente ad un fattore di tempo $T_v = 0.05$.

Le soluzioni del grado di consolidazione medio U_m in funzione del fattore di tempo T_v si trovano diagrammate o tabulate per diversi andamenti dell'isocrona iniziale (costante, triangolare, etc.). In tabella 7.2 e in Figura 7.18 sono riportate le soluzioni relative al caso di isocrona iniziale costante con la profondità (con ascissa in scala lineare e logaritmica).

Tabella 7.2. – Valori tabulati della soluzione dell'equazione $U_m = f(T_v)$ per il caso di isocrona iniziale costante con la profondità

U_m	10	20	30	40	50	70	90	95
T_v	0.0077	0.0314	0.0707	0.126	0.196	0.403	0.848	1.129

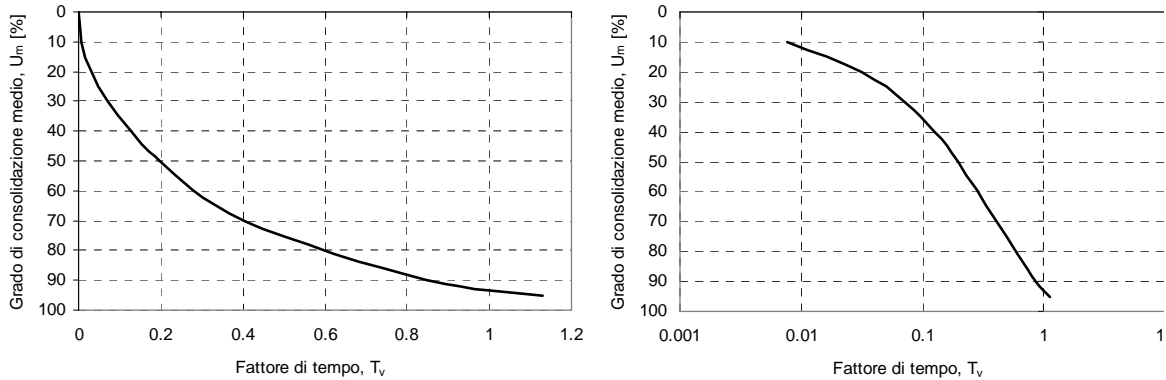


Figura 7.18 - Diagrammi della soluzione dell'equazione $U_m = f(T_v)$ per il caso di isocrona iniziale costante con la profondità, con ascissa in scala lineare (a) e logaritmica (b)

Esistono anche espressioni analitiche che forniscono una stima approssimata della soluzione per il caso di isocrona iniziale costante con la profondità, ad esempio:

$$U_m = \sqrt[6]{\frac{T_v^3}{T_v^3 + 0.5}}; \quad T_v = \sqrt[3]{\frac{0.5 \cdot U_m^6}{1 - U_m^6}} \quad \text{(Brinch-Hansen)} \quad \text{(Eq. 7.40)}$$

$$U_m = 2 \cdot \sqrt{\frac{T_v}{\pi}}; \quad T_v = \frac{\pi}{4} \cdot U_m^2 \quad \text{per } U_m \leq 60\% \quad \text{(Terzaghi)} \quad \text{(Eq. 7.41)}$$

$$T_v = 1.781 - 0.933 \log(100 - U_m(\%)) \quad \text{per } U_m > 60\%$$

$$U_m = \frac{\left(\frac{4 \cdot T_v}{\pi}\right)^{0.5}}{\left[1 + \left(\frac{4 \cdot T_v}{\pi}\right)^{2.8}\right]^{0.179}}; \quad T_v = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot U_m^2}{\left[1 - U_m^{5.6}\right]^{0.357}} \quad \text{(Sivaram & Swamee)} \quad \text{(Eq. 7.42)}$$

Se fossero verificate le ipotesi della teoria della consolidazione, le curve sperimentali in prova edometrica cedimento – tempo, per qualunque terreno e per qualunque carico applicato, dovrebbero essere eguali, a meno di fattori di scala, alle curve teoriche adimensionali $U_m = f(T_v)$. Infatti $U_m = \frac{s(t)}{s_f}$ è proporzionale al cedimento $s(t)$ e $T_v = \frac{c_v \cdot t}{H^2}$ è pro-

porzionale al tempo t . I fattori di scala sono caratteristici dei diversi terreni e devono essere determinati sperimentalmente. In particolare occorre determinare il cedimento di consolidazione edometrica finale, s_f , la lunghezza del percorso di drenaggio H , e il coefficiente di consolidazione, c_v .

In realtà le ipotesi alla base della teoria non sono ben verificate per i terreni reali, come discuteremo in seguito, ma l'accordo fra le curve adimensionali teoriche e quelle sperimentali è accettabile per gradi di consolidazione non superiori al 60%.

A questo punto è opportuno conoscere come si può determinare il coefficiente di consolidazione, c_v , (parte essenziale del fattore di scala) l'unico parametro che nella soluzione dell'equazione della consolidazione tiene conto delle proprietà del terreno. Per la sua determinazione si utilizzano i risultati della prova edometrica.

7.7 Determinazione sperimentale del coefficiente di consolidazione verticale

Come abbiamo visto al paragrafo 7.2 la prova edometrica standard è eseguita applicando incrementi successivi di carico, mantenuti costanti fino all'esaurimento del fenomeno di consolidazione (e oltre). Durante tale periodo si rilevano i cedimenti del provino nel tempo¹¹.

I valori osservati dell'altezza del provino sono generalmente diagrammati secondo due modalità:

- in funzione del logaritmo del tempo,
- in funzione della radice quadrata del tempo.

Gli andamenti tipici dei grafici che si ottengono nei due casi sono rappresentati nelle Figure 7.19a e 7.19b.

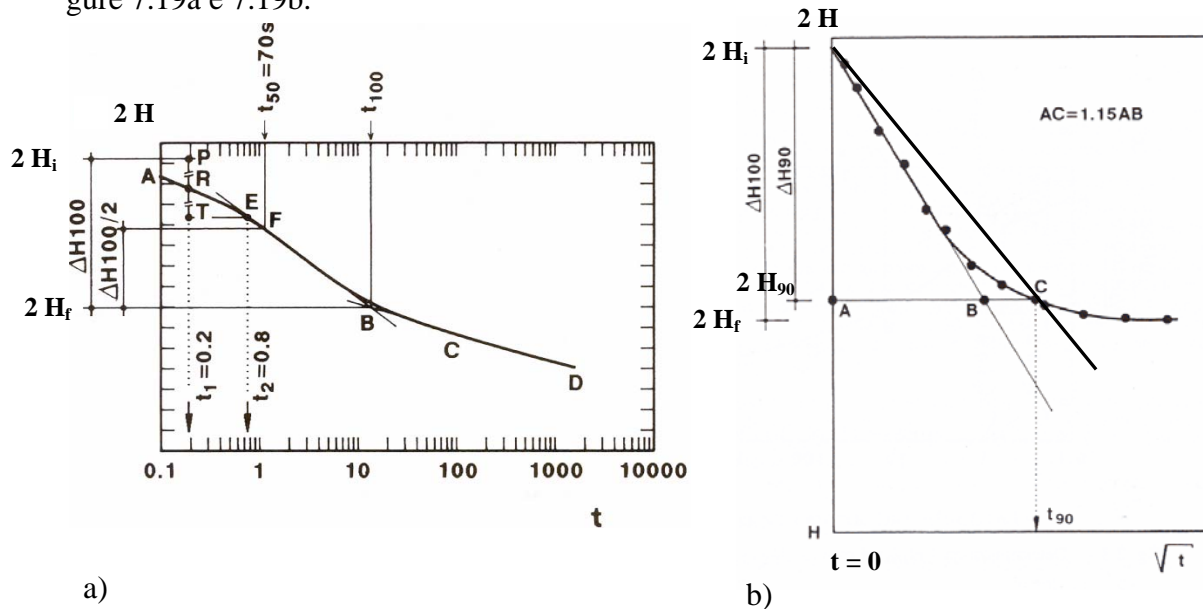


Figura 7.19 – Andamento dell'altezza del provino ($2H$) durante la consolidazione edometrica in funzione del logaritmo del tempo (a) e della radice quadrata del tempo (b)

Dai diagrammi così ottenuti è possibile determinare, relativamente a ciascuno dei gradini di carico applicati, il coefficiente di consolidazione, c_v , mediante una delle due procedure di seguito descritte.

7.7.1 Metodo di Casagrande

Si applica al grafico tempo (log)-altezza del provino (Figura 7.19a), nel quale si assume di poter distinguere un primo tratto, AB, corrispondente al processo di consolidazione e-

¹¹ Normalmente vengono prese misure di abbassamento a intervalli di tempo via via crescenti (10'', 20'', 30'', 1', 2', 5', 10' etc..)

dometrica primaria, e un secondo tratto lineare, BD, corrispondente alle deformazioni viscosse (la consolidazione secondaria di cui parleremo in seguito). Ovviamente tale suddivisione è del tutto arbitraria, in quanto un'aliquota del cedimento viscoso si sovrappone al cedimento di consolidazione primaria nel tratto iniziale della curva, mentre nel tratto finale, oltre al cedimento di consolidazione secondaria sarà presente anche una componente (seppure trascurabile) del cedimento di consolidazione primaria.

Come già detto, per poter interpretare il fenomeno reale mediante il modello teorico di Terzaghi, occorre sovrapporre e far coincidere la curva teorica adimensionale $U_m=f(T_v)$ con la curva sperimentale, allo scopo di determinare i fattori di scala.

Il primo passo del metodo consiste nell'individuare, mediante una procedura convenzionale, le altezze del provino corrispondenti all'istante iniziale e alla fine del processo di consolidazione primaria.

L'origine (zero corretto) delle deformazioni può essere ricavata osservando che la relazione tra grado di consolidazione medio, U_m , e fattore di tempo, T_v , (e quindi la relazione tra cedimenti e tempo), per valori di $U_m < 60\%$ (Eq. 7.45), è con buona approssimazione una parabola ad asse orizzontale. Il tempo risulta cioè proporzionale al quadrato del cedimento, ossia, considerati due istanti, t_1 e t_2 , e i relativi cedimenti, $S(t_1)$ e $S(t_2)$ (tali che $U_m < 60\%$), vale la relazione:

$$\frac{S(t_1)}{S(t_2)} = \frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2}} \quad (\text{Eq. 7.43})$$

Di conseguenza, scelto un tempo t_1 sufficientemente piccolo e assunto $t_2 = 4t_1$, risulta dalla (7.45) che $S(t_2) = 2 S(t_1)$; quindi, con riferimento alla Figura 7.19a, se il segmento PR misura il cedimento all'istante t_1 (dove P, che rappresenta l'origine delle deformazioni, è incognito), il segmento PT, che misura il cedimento all'istante t_2 , dovrà essere il doppio di PR. Di conseguenza ribaltando il segmento RT rispetto al punto R si trova il punto P e quindi, sull'asse delle ordinate, l'altezza $2H_i$, corrispondente all'inizio della consolidazione primaria ($U_m = 0\%$)¹².

L'altezza del provino al termine del processo di consolidazione primaria ($U_m = 100\%$), $2H_f$, è invece ottenuto, sempre con riferimento alla Figura 7.19a, dall'intersezione della retta CD, relativa al tratto finale della curva, con la retta EB tangente alla curva nel punto di flesso F.

Mediante la relazione:

$$2H_{50} = (2H_i + 2H_f)/2 \quad (\text{Eq. 7.44})$$

si determina quindi l'altezza corrispondente alla metà del processo di consolidazione, ovvero l'altezza media di drenaggio H_{50} .

Dalle tabelle (o tramite le relazioni) che forniscono U_m in funzione di T_v , si ricava poi il fattore di tempo adimensionale che corrisponde ad un grado di consolidazione medio del 50% (ad esempio dalla relazione di Terzaghi si ottiene $T_v = 0.197$).

Sostituendo i valori sopra determinati nella definizione del fattore di tempo T_v (Eq. 7.33), è possibile infine ricavare il coefficiente di consolidazione verticale, c_v , tramite la seguente relazione:

¹² La procedura è necessaria perché l'asse delle ascisse è in scala logaritmica e quindi non contiene il tempo $t=0$. Inoltre per i primi gradini di carico si possono avere abbassamenti per assestamento della piastra di carico e, se il provino non è completamente saturo, una deformazione istantanea per compressione ed espulsione delle bolle d'aria eventualmente presenti all'interno del provino.

$$c_v = \frac{H_{50}^2 \cdot 0.197}{t_{50}} \quad (\text{Eq. 7.45})$$

7.7.2 Metodo di Taylor

Il metodo di Taylor viene applicato facendo riferimento al diagramma \sqrt{t} -altezza del provino (Figura 7.19b), in cui si nota che i punti sperimentali nel tratto iniziale della curva si allineano approssimativamente lungo una retta (essendo, come già osservato, il tempo proporzionale al quadrato del cedimento per valori di $U_m < 60\%$). L'autore della procedura ha inoltre evidenziato che l'ascissa, t_{90} , corrispondente al 90% del cedimento di consolidazione primaria, $2H_{90}$, è pari a 1.15 volte il valore dell'ascissa corrispondente alla stessa ordinata sulla retta interpolante i dati sperimentali. Quindi, una volta diagrammati gli spostamenti in funzione di \sqrt{t} e tracciata la retta interpolante i punti iniziali (corrispondenti a $U_m < 60\%$), si disegna la retta con ascisse incrementate del 15% rispetto a quella interpolante; dall'intersezione di quest'ultima con la curva sperimentale, punto C, si ricava $\sqrt{t_{90}}$, ossia la radice del tempo corrispondente al 90% della consolidazione primaria e, proiettato sull'asse delle ordinate, l'altezza $2H_{90}$ corrispondente.

In questo caso, l'altezza di inizio consolidazione $2H_i$ è determinata prolungando la retta interpolante fino ad incontrare l'asse delle ordinate, punto O, e l'altezza corrispondente alla fine del processo di consolidazione è data da:

$$2H_f = 2H_i + \frac{9}{10} \cdot (2H_f - 2H_i) \quad (\text{Eq.7.46})$$

L'altezza media di drenaggio, H_{50} , è determinata anche in questo caso a partire dall'altezza corrispondente alla metà del processo di consolidazione (Eq. 7.44).

Dalle tabelle (o tramite le relazioni) che forniscono U_m in funzione di T_v , si ricava poi il fattore di tempo adimensionale che corrisponde ad un grado di consolidazione medio del 90% (ad esempio dalla relazione di Terzaghi si ottiene $T_v = 0.848$).

Sostituendo i valori sopra determinati nella definizione del fattore di tempo T_v (Eq. 7.33), è possibile infine ricavare il coefficiente di consolidazione verticale, c_v , tramite la seguente relazione:

$$c_v = \frac{H_{50}^2 \cdot 0.848}{t_{90}} \quad (\text{Eq. 7.47})$$

7.8 Validità e limiti della teoria della consolidazione edometrica

La teoria della consolidazione edometrica si basa sullo schema di carico e di vincolo (condizioni al contorno) rappresentato in Figura 7.13 (strati orizzontali, carico applicato uniforme e infinitamente esteso) che comporta l'assenza di deformazioni orizzontali e il flusso solo verticale dell'acqua. Le condizioni al contorno della prova edometrica riproducono fedelmente tale schema, che ha il vantaggio della semplicità essendo monodimensionale.

Talvolta lo schema corrisponde bene alle condizioni stratigrafiche e geotecniche del deposito ed alla causa perturbatrice (ad esempio un abbassamento uniforme del livello piezometrico, oppure un riporto strutturale di spessore costante o, più in generale, un manu-

fatto che trasmette al terreno un carico uniformemente distribuito di estensione molto maggiore dello spessore dello strato compressibile), ma altre volte no.

Se ad esempio l'area di carico è di dimensioni piccole rispetto allo spessore dello strato compressibile, l'incremento di tensione verticale non può essere assunto costante con la profondità (vedi Capitolo 6), le deformazioni di taglio non sono zero e quindi si hanno cedimenti istantanei anche a deformazione volumetrica nulla, la filtrazione avviene anche in direzione orizzontale, etc.

Ma anche quando lo schema stratigrafico e geotecnico corrisponde bene alle condizioni al contorno ed il fenomeno è unidirezionale, la soluzione di Terzaghi è solo approssimata poiché non sono verificate alcune ipotesi base. In particolare:

- il legame tensioni deformazioni è marcatamente non lineare, come messo in evidenza dai grafici delle Figure 7.3, 7.9, etc. ;
- la permeabilità del terreno varia nel tempo, durante il processo di consolidazione, perché diminuisce l'indice dei vuoti;
- è trascurata la componente viscosa delle deformazioni.

Per potere comunque utilizzare la soluzione di Terzaghi, si ipotizza che il terreno abbia un comportamento lineare e permeabilità costante nell'ambito di ogni gradino di carico, e che le deformazioni viscosi abbiano inizio solo quando la consolidazione edometrica è in gran parte esaurita.

Per ogni gradino di carico, sfruttando solo la parte iniziale della curva sperimentale allo scopo di escludere le deformazioni viscosi, si possono determinare i corrispondenti valori di c_v , a_v , e k , e utilizzare nelle applicazioni i valori di tali proprietà determinati per la pressione iniziale e l'incremento di pressione più prossimi a quelli reali. Se le ipotesi di Terzaghi fossero verificate, si otterrebbero gli stessi valori di c_v , a_v , e k per tutti i gradini di carico, poiché tali grandezze sarebbero indipendenti dalla pressione.

7.9 Consolidazione secondaria

La curva teorica della consolidazione edometrica di Terzaghi prevede, nella parte terminale, un asintoto orizzontale. Le curve sperimentali $s(t)$ mostrano invece un asintoto inclinato. Tale differenza, più o meno marcata a seconda del tipo di terreno, è dovuta alle deformazioni viscosi dello scheletro solido. Deformazioni che avvengono anche a pressione efficace costante, e quindi anche (ma non solo) a consolidazione primaria esaurita. La pendenza dell'asintoto inclinato nel piano semilogaritmico e - $\log t$, è detto indice di compressione secondaria:

$$C_\alpha = \frac{\Delta e}{\Delta \log t} \quad (\text{Eq. 7.48})$$

Valori di riferimento dell'indice di compressione secondaria, per alcuni tipi di terreno, sono riportati in Tabella 7.3:

Tabella 7.3 - Valori indicativi del rapporto C_α/C_c

Terreno	C_α/C_c
Argille tenere organiche	$0,05 \pm 0,01$
Argille tenere inorganiche	$0,04 \pm 0,01$
Sabbie	da 0,015 a 0,03

Come osservato nel Paragrafo 7.2 le curve di compressibilità edometrica nei piani $e-\log \sigma'_v$, $e-\sigma'_v$, e $\varepsilon_a-\sigma'_v$ si ottengono in genere collegando i punti sperimentali ricavati dalle misure effettuate al termine del periodo di applicazione di ciascun incremento di carico (di solito 24h). Sarebbe quindi più corretto depurare gli abbassamenti misurati dalla componente viscosa, in sostanza utilizzando come altezza finale del provino l'altezza $2H_f$ corrispondente al 100% di consolidazione edometrica. L'errore che si commette non è comunque particolarmente rilevante.